25. Geodesic Space に就て (1)

工藤達二 (阪大)

1. *Riemann space* に於ける *geodesic line* の研究 特に *in the large* の研究は K. Menger[1] に初まる *metric method* によるのが好都合なことが多い。

こゝでは *geodesic space* 及び *geodesic mapping* の一般的性質を追求する。

geodesic space (略して *g.s.*) は *Riemann space* の *geodesic distance* による *metric* を抽象化したもので、あらゆる *complete* な *Riemann space* を含む。

geodesic mapping (略して *g.m.*) とは、二つの *g.s.* の一方から他方への *betweenness-relation* を保存する *mapping* であつて、*isometric mapping*, *covering mapping*, *isometric motion* (*autometric*) 等を含むものであり興味ある問題は豊富であるが、その解決は中々困難なる故、それは論文の随所に於て問題として挙げ[illegible]批判を乞ふことにする。

2. Geodesic Space の定義

g.s. Ω は次の *axiom*[2] (A—C) によつて規定された。

(A) Ω は *finitely compact* (*bounded set* は *compact*) なる *metric space*

(B) $\Omega \ni \forall p, q$ に対し pq の *middle point* m が少くとも一つ存在する : $pm + mq = pq$, $pm = mq$ (*)

---

(1) *Untersuchungen über allgemeine Metrik. Math. Ann. 100.*

(2) *Trans. Amer. Math. Soc. vol. 54*

この公理群は独立性を缺くこと甚しいものであるが本論ではかかる点には重点をおかない故、こゝには立入らない。

(*) Ω内の二点 p, q の距離を pq で表はす。又混同の恐あるときは $\rho(p,q)$, $r(p,q)$ 等の記号を用ひる。

(C) $\forall p\ (\in \Omega)$ に対し正数 $d(p)$ が対応し $S(p, d(p))$[3] $\ni q, r$ に対して middle point m は只一つ。又只一つの $n \in \Omega$ があつて q は n, r の中点となる。

(C)に於て正数 $d(p) = \infty$ としたとき $(A-C)_{x=\infty}$ を満す g.s. を H. Busemann[4] に従つて s.l. space と名付ける。

(A－C) よりの基本的結論を得るために次の諸定義をなす。

R^1 の segment のΩ内への isometric image を segment と云ふ。Ω内 c が a と b との間にあるとは、$ac + cb = ab$ なることを云ふ。

$-\infty < s < -\infty$ のΩ内の locally isometric mapping $g(s)$ を geodesic line と云ふ。

二つの geodesic line $g(s)$, $h(s)$ は $g(s+\alpha) \equiv h(s)$ 又は $g(-s+\alpha) = h(s)$ がある定数 α に対して成立つとき、同じものと見做す。

geodesic ray $g(s)$ とは $\alpha \leqq s < +\infty$ のΩ内への locally isometric mapping。二つの geodesic ray が同じものを表はすとは geodesic line の場合と同様に定義する。

次に segment σ が geodesic line $g(s)$ に含まれるとは σ がある $s_1 < s_2$ に対して $g(s): s_1 \leqq s \leqq s_2$ で表はされることとする。

かく定義するとき次の基本的諸事項が成立つ。

(2.1) 任意のΩの二点 p, q は segment ($\overline{pq}$ とかく) で結ばれる。何者: $pq = a$ として (B) により $p_0 = p$, $p_a = q$, $p_{\frac{a}{2}}$ は p_0, p_a の中点、$p_{\frac{a}{2^2}}$ は p_0, $p_{\frac{a}{2}}$ の中点、$p_{\frac{3a}{2^2}}$ は $p_{\frac{a}{2}}$, p_a の中点 ...... とするとき一般に $p_{\frac{ka}{2^n}}$ ($k=0,1,2,\cdots$; $n=0,1$

$\ldots 2^k$) なる点が定義出来且つ $\frac{k}{2^n}a \longrightarrow P_{\frac{k}{2^n}a}$ は isometric である。(A)によりてこれは $\langle 0, a\rangle$ の Ω 内への isometric mapping に拡張出来る。

---

(3) p を中心とし $d(p)$ を半径とする球の内部

(4) H. Busemann は主に微何学基礎論のために s.h. space を用いてゐる。例へば Math. Ann. 107.

又 (C) を用ひれば

(2.2) $S(p) = S(p, \frac{d(p)}{6})$ を p の標準近傍と名付ければ $S(p)$ の二点 p_1, p_2 に対しては p_1, p_2 を結ぶ segment は只一つ。又只一つの q があって q, p_2 を結ぶ segment は又一つ。且つ p_1 は $q\,p_2$ の中点となる。

(2.3) 任意の segment は只一つの geodesic line に含まれる。

3. g.s. の次元.

(3.1) 先づ Ω がその一点 p で $\dim_p \Omega^{(5)} = 1$ なら Ω は $-\infty < p < +\infty$ の isometric image である。

証明: $\forall q \in \Omega$ を p と結ぶ segment の定める geodesic line を $g(s)$ とする。($g(0) = p$ としておく)

$g(s)$ の $\dot{S}(p)$ との交はり $g(\frac{d(p)}{3})$, $g(-\frac{d(p)}{3})$ の定める segment を σ とすれば $\overline{S(p)} = \sigma$ である。

何となれば $\overline{S(p)} - \sigma \ni p_1$ があれば $p_1 \times \sigma^{(6)}$ は p に於て二次元となる。

故に Ω は p の充分近くで一次元である。

今 $0 \leq s \leq s'$ で $\dim_{g(s)} \Omega = 1$ なる s' の上端を s_0 とすれば $s_0 = +\infty$ である。

∵ もし $s_0 < +\infty$ なら $g(s_0)$ で p に於けると同様の議論をすれば容易に矛盾に導かれる。

故に $q \in g(S)$ に於ても $\dim_q \Omega = 1$.

Ω に $g(S)$ 以外の点が含まれないこと，$g(S)$ が自分自身に交はらないことは明らかである。

---

(5) menger の dimension

(6) $\overline{p_1 x}$， $x \in \sigma$ の和集合（cone）。

(3.2) $S(p.\varepsilon)$ は ε が充分小なるとき σ に homeomorphic である。$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{d(p)}{3}$ とし

何者： $\dot{S}(p.\varepsilon_2) \ni q_2$ と p とを結べば $\dot{S}(p.\varepsilon_1)$ と只一点 $q_1 = \chi(q_2)$ で交はる。

今 $q_2^{(\nu)} \longrightarrow q_2$、とすれば $q_1^{(\nu)} = \chi(q_2^{(\nu)})$ は (A) により集積点をもつ此の任意の一つを q_1° とすれば $pp_1^{(\nu)} + p_1^{(\nu)}p_2^{(\nu)} = pp_2^{(\nu)}$,
$pp_1^{(\nu)} = \varepsilon_1$ （$\nu = 1, 2, \cdots\cdots$） なる故 $pp_1^{(0)} + p_1^{0}p_2 = pp_2$,
$pp_1^{(0)} = \varepsilon_1$

而るに $q_1 = \chi(q_2)$ は最後の等式を充す只一つの点なる故 $q_1^{\circ} = q_2$

故に χ は連続又一対一なることも明らかなる故 $S(p, \varepsilon_2)$ の compact 性より $S(p, \varepsilon_1)$, $S(p, \varepsilon_2)$ は homeomorphic である。

(3.2) により $\quad \dim^*_p \Omega = \underset{(\varepsilon\ 充分小)}{\dim_p S(p, \varepsilon)} + 1$

が可能となる。

(3.4.) $\dim^*_p \Omega \geqq \dim_p \Omega$ なることは明らか。

次に $\dim^*_p \Omega = \text{const. over } \Omega$ ．なることを云ふ。

(3.5) ［定理］ $^{\exists}p \in \Omega$ で $\dim^*_p \Omega = n$ なら

$$^{\forall}q \in \Omega \text{ で } \dim^*_q \Omega = n$$

（証明） p, q を通る geodesic line を $g(S)$ とする（$g(0) = p$, $g(a) = q$）。

すると $g(S)$： $0 \leqq S \leqq a$ は compact なる故 一定の ε に

対して $\overset{*}{dim}_{g(s)}\Omega = dim\,\dot{S}(g(s),\varepsilon)+1$ となる。

先づ $0 \leq s < \frac{\varepsilon}{2}$ に対して $\overset{*}{dim}_{g(s)}\Omega = const.$ である。

$\because$ $\overline{S(p,\varepsilon)} \supset \overline{S(g(s),\frac{\varepsilon}{2})}$, $\overline{S(p,\frac{\varepsilon}{2})} \subset \overline{S(g(s),\frac{\varepsilon}{2})}$

なる故

$$\overset{*}{dim}_p\Omega \begin{cases} = dim\,\dot{S}(p,\varepsilon)+1 \overset{(8)}{=} dim\,\overline{S(p,\varepsilon)} \geq dim\,\overline{S(g(s),\frac{\varepsilon}{2})} \\ = dim\,\dot{S}(p,\frac{\varepsilon}{2})+1 = dim\,\overline{S(p,\frac{\varepsilon}{2})} \leq dim\,\overline{S(g(s),\varepsilon)} \end{cases}$$

$= dim\,\dot{S}(g(s),\frac{\varepsilon}{2})+1 = \overset{*}{dim}_{g(s)}\Omega$

$= dim\,\dot{S}(g(s),\varepsilon)+1 = dim_{g(s)}\Omega$

然るに ε が s に無関係なることはこの操作を繰返し遂に $0 \leq s \leq a$ に対し $\overset{*}{dim}_{g(s)}\Omega \equiv const$ なることを意味する。然るに g は Ω の任意の点なる故定理は証明された。

---

(8) "M が n-dimensioned compact set で I が R^1 の interval なる sylindir $M \otimes I$ は $dim(M \otimes I) = dim M + 1$" なることは Alexandroff: Dimensions theorie. Math. Ann. 106 を見よ。この事実を用ひれば (8) は容易に云へる。実は $dim_p[M \times p] = dim\,M + 1$ なることが云へれば $\overset{*}{dim}_p\Omega = dim_p\Omega$ となり Menger の dimension の homogeneity が云へるのであるがはっきりした証明をしらぬからあとまはしにする。

---

4. $\overset{*}{dim}_p\Omega \equiv 2$ の場合

$dim_p\Omega = 1$ の点はあり得ないから

$2 \leq dim_p\Omega \leq \overset{*}{dim}_p\Omega \leq 2$ が各点 p で成立つ。

更に Pasch の定理が成立つ。

(4.1) (定理) $\bar{S}(p)$ の三点 (p_1, p_2, p_3) が三角形をなすとき[9] は x を $\overline{p_1p_2}$ の内点とするとき、y が $\overline{p_1p_3}+\overline{p_2p_3}$ を動けば $\overline{xy}$ の定むる geodesic line は x を通る geodesic line 全体を動き、且つ $y = p_1, p_2$ の場合を除き一度づゝである。

（証明） H. Busemann[10] が S.I. space で証明したものと殆んど同様である。

この定理によれば

(4.2)（定理） Ω の各点は数平面の単位円に homeomorphic な近傍をもつ。従って空間の separability (finitely compact) より Ω は三角形分割可能である。[11]

（証明） 充分小な δ に対し $S(p,\delta)$ 上の diametral でない二点 q, r をとりその diametral な点を q', r' とすれば、x が四辺形 $q r q' r'$ を動くとき $\overline{px}$ はあつまって単位円に homeomorph な近傍をつくる。(4.1) によればこの証明は明らかである。　（以下 次巻）

---

(9) $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_2 p_3}$, $\overline{p_3 p_1}$ が内点を共有しないこと。

(10) Math. Ann. 10

(11) T. Radó の定理 (Acta Szeged, vol 2)

（1947. 1. 20 受付）